Διάλεξη 7η

15/03/2018

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΚΟΘ (i): Έστω $x_1, \dots, x_n$ ανεξ. και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2. Τότε για μεγάλο n $(n \geq 30)$: $\sum_{1}^{n} x_i \xrightarrow[\text{προσεγγ.}]{\text{κατά}} N(n\mu, n\sigma^2)$

ΚΟΘ (ii): $x_1, \dots, x_n$ τ.δ. από πληθυσμό (μ, σ^2).
Για μεγάλο n, $\bar{x} \xrightarrow[\text{προσεγγ.}]{\text{κατά}} N(\mu, \sigma^2/n)$.

~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o

Παράδειγμα 3.9.: $1\,\mu sec = 10^{-6} sec$, $Pois(\lambda) = \dfrac{0.16^{\kappa} \cdot e^{-0.16}}{\kappa!}$.

$1\,sec = 10^{6}\,\mu sec$

Ποια η πιθανότητα σε $1 sec$ να έχουμε αριθμό μεταξύ του $[159000, 161000]$;

Λύση

Έστω $X_1, \dots, X_{10^6}$ ο αριθμός των ηλεκτρονίων που φτάνουν στο $1^o, 2^o, \dots, 10^{6o}$ μsec.

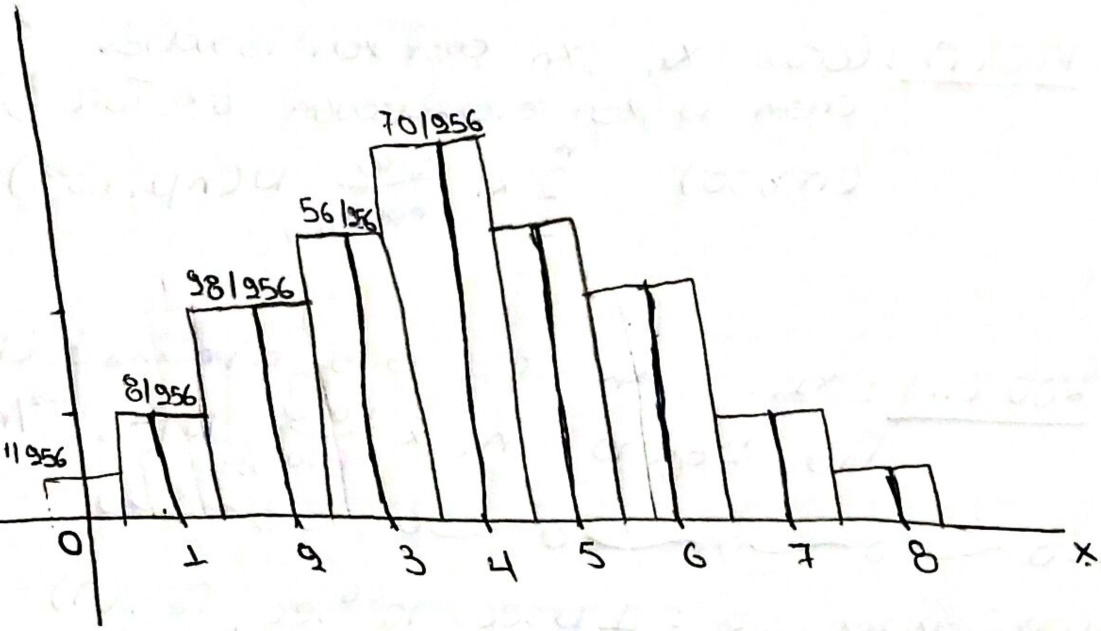
$Y = X_1 + \dots + X_{10^6}$, $X_i \sim Pois(\lambda = 0.16)$, $\mu = \lambda = 0.16 = \sigma^2$.

$Y \xrightarrow[\text{προσεγγ.}]{\text{κατά}} N(n\mu, n\sigma^2)$

Δηλαδή $Y \xrightarrow[\text{προσεγγ.}]{\text{κατά}} N(160\,000, 160\,000) \longrightarrow \dfrac{Y - 160000}{400} \xrightarrow[\text{προσεγγ.}]{\text{κατά}} N(0,1)$

$$P(159000 \leq Y \leq 161000) \approx$$
$$\approx P\left(158999{,}5 \leq Y \leq 161000{,}5 \,\middle|\, Y \xrightarrow[\text{προσεγγ.}]{\text{κατά}} N(160.000, 16000)\right) =$$
$$= P\left(\frac{158999{,}5 - 160.000}{400} \leq Z \leq \frac{161000{,}5 - 160000}{400} \,\middle|\, Z \xrightarrow[\text{προσεγγ.}]{\text{κατά}} N(0,1)\right) =$$
$$= P(-2{,}5 \leq Z \leq 2{,}5) = 2 * P(0 \leq Z \leq 2{,}5) = 0{,}9876$$

Κανονική προσέγγιση διωνυμικής κατανομής.



n δοκιμές Bernoulli με $p = P(E)$ και $1-p = q = P(A)$

i-οστή δοκιμή: $X_i = 1$ αν E με $p = P(E)$ | $E(X_i) = p = \mu$
$X_i = 0$ αν A με $1-p = P(A)$ | $E(X_i^2) = p$ και

$Var(X_i) = p - p^2$
$= p(1-p)$
$= \sigma^2$

αριθμός E στις n δοκιμές:

$$X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n = \sum_1^n X_i \sim B(np,\ np(1-p))$$

$$X = \sum_1^n X_i \ \underset{\text{προσέγγιση}}{\overset{\text{κατά}}{\longrightarrow}} \ N(np,\ np(1-p))$$

Εφαρμογή: $P_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x=0,1,\dots,n$

$$= \binom{8}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^8, \quad x=0,1,\dots,8.$$

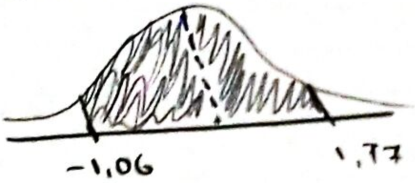
$X \sim B(n=8, p=0,5)$

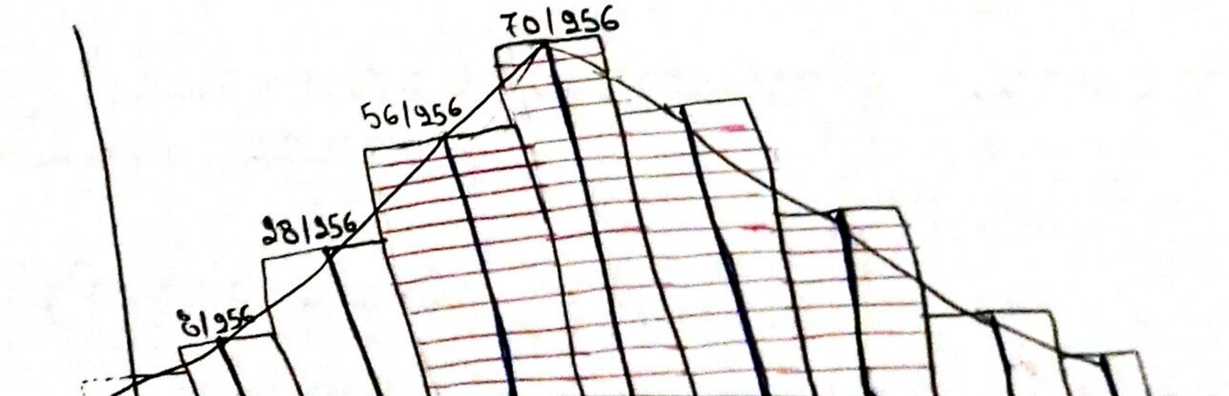
$$P(3 \le X \le 6) = P(X=3)+\dots+P(X=6) = \frac{56}{256}+\dots+\frac{28}{256} = 0,82$$

$$P(3 \le X \le 6) \approx P\left(2,5 \le X \le 6,5 \mid X \overset{\text{κατά}}{\underset{\text{προσεγγ.}}{\sim}} N(4,2)\right)$$

$$= P\left(\frac{2,5-4}{\sqrt{2}} \le \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z} \le \frac{6,5-4}{\sqrt{2}} \;\Big|\; Z \overset{\text{κατά}}{\underset{\text{προσεγγ.}}{\sim}} N(0,1)\right)$$

$$= P(-1,06 \le Z \le 1,77) = 0,3554 + 0,4616 = 0,8170$$





Παράδειγμα 3.3. : Μεγάλος αριθμός σπόρων $n=100$ (δοκιμές των 100 σπόρων)
με αναλογία: 2 κόκκινοι, 2 άσπροι, 1 μπλε συσκευάζονται
και ενοικοτελούνται. $P(X\le 50)=;$

, όπου $X=$ αριθμός των άσπρων σπόρων.

Λύση

$$P(X\le 50)=\sum_{x=0}^{50}\binom{100}{x}\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{100-x}$$

$$X\sim B\left(np=100\cdot\frac{2}{5},\ np(1-p)=100\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\right)$$

$$X\sim B(40,24)$$

$$\simeq P\left(X\le 50{,}5 \;\middle|\; X\xrightarrow[\text{προσεγγ.}]{\text{κατά}}\mathcal{N}(40,24)\right)$$

$$=P\left((Z=)\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{50{,}5-40}{\sqrt{24}} \;\middle|\; Z\xrightarrow[\text{προσ.}]{\text{κατά}}\mathcal{N}(0,1)\right)$$

$$=P(Z\le 2{,}14)=0{,}5+0{,}4842=0{,}9842$$

$$P(X\le 50)=P(0\le X\le 50)\simeq P(-0{,}5\le X\le 50{,}5)$$

$$\simeq P\left(\frac{-0{,}5-40}{\sqrt{24}}\le Z\le 2{,}14\right)$$

$$=P(-8{,}26\le Z\le 2{,}14)$$

Άσκηση 3.2) (Βάζω τέτοια άσκηση στο τέλος)

Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από $N(\mu, \sigma^2)$

i) $X_i - \bar{X} \sim ;$ Δίνεται ότι:

α) $\frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2} \sim X_1^2$, β) $\sum_1^n \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim X_n^2$.

γ) $E(S^2) = ;$

$\hookrightarrow$ γ) $S^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n}(n-1)\underbrace{\frac{1}{n-1}\sum_1^n (X_i-\bar{X})^2}_{S^2}$

$= \frac{n-1}{n} S^2 \rightsquigarrow E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$

Λύση

i) $X_i - \bar{X} \sim N(\quad , \quad)$

Έχω: $Y = X_i - \bar{X} = X_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j = X_i - \frac{1}{n}X_i - \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n X_j$

$= X_i\left(\frac{n-1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n X_j$

$\rightsquigarrow E(Y) = \frac{n-1}{n}E(X_i) - \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} E(X_j)$

$= \frac{n-1}{n}\mu - \frac{1}{n}(n-1)\mu$

$= 0$

$Var(Y) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 Var\, X_i + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n Var\, X_j$ → ΣΩΣΤΟΣ ΤΡΟΠΟΣ.

$= \frac{(n-1)^2}{n^2}\sigma^2 + \frac{1}{n^2}(n-1)\sigma^2 = \boxed{\frac{n-1}{n}\sigma^2}$

$Var(X_i - \bar{X}) = \cancel{Var(X_i) - Var(\bar{X}) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}} = \boxed{\frac{n-1}{n}\sigma^2}$???

ΠΡΟΣΟΧΗ! ΛΑΘΟΣ! (ΔΕΝ ΜΠΑΙΝΕΙ (-) ΣΤΗΝ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ)

Άσκηση 3.9)

Έστω X_1, X_2 τδ από $N(0,1)$.

i) $X_2 - X_1 \sim$; ii) $\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_2-X_1)^2} \sim$; iii) $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{(X_2-X_1)^2}} \sim$; iv) $\frac{X_2^2}{X_1^2} \sim$;

Λύση

i) $X_2 - X_1 \sim N(0,2)$

ii) $X_1 + X_2 \sim N(0,2) \rightsquigarrow \frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1) \rightsquigarrow \frac{(X_1+X_2)^2}{2} \sim \chi_1^2$

$X_2 - X_1 \sim N(0,2) \rightsquigarrow \frac{X_2-X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1) \rightsquigarrow \frac{(X_2-X_1)^2}{2} \sim \chi_1^2$

βαθμοί ελευθερίας

$$\rightarrow \frac{\frac{(X_1+X_2)^2}{2} \Big/ 1}{\frac{(X_2-X_1)^2}{2} \Big/ 1} \left(= \frac{(X_1+X_2)^2}{(X_2-X_1)^2} \right) \sim \frac{\chi_1^2 / 1}{\chi_1^2 / 1} \equiv F_{1,1}.$$

βαθ. ελευθ

iii) $X_1 + X_2 \sim N(0,2) \rightsquigarrow \frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

$\frac{(X_2-X_1)^2}{2} \sim \chi_1^2$

$$\rightarrow \frac{\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{(X_2-X_1)^2}{2} \Big/ 1}} \equiv$$

$$\equiv \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi_1^2 / 1}} \equiv t_1.$$

iv) $\frac{X_2^2}{X_1^2} \equiv \frac{\chi_1^2 / 1}{\chi_1^2 / 1} \equiv F_{1,1}.$